1ο Μαθημα:

8/10/2020

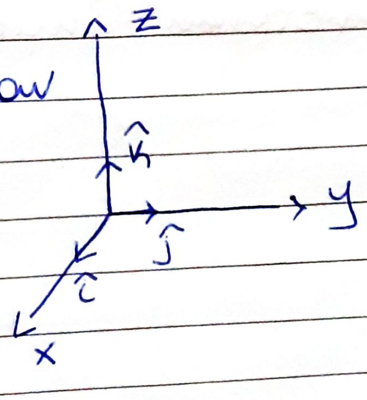
Διδασκων: Θεόδωρος Χωρικης
horikis@uoi.gr

Θα ανεβαζει και στο σαιτ του ανα διαστηματα τις σημειωσεις που θα ειναι πιο αναλυτικες από οτι αυτες που γραφει στο μαθημα.

Γραμμικοι διανυσματικοί χώροι -- Συμβολισμος:

Από την Ευκλειδια γεωμετρία γνωριζαμε οτι
1. Αν $\vec{a}$ διάνυσμα και $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τοτε και το $\lambda\vec{a}$ ειναι διάνυσμα ιδιας φοράς ($\lambda > 0$) ή αντιθετης ($\lambda < 0$)
2. Αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ειναι δύο διανύσματα τοτε καθε γραμμικος συνδιασμός $\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$ ειναι επισης διάνυσμα $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
3. Υπαρχει διανυσμα $\vec{0}$ τετοιο ωστε $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. Επίσης $\forall\ \vec{a}\ \exists\ \vec{b}$ τετοιο ωστε $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{b}$
5. Για τον $\mathbb{R}^3$ χρειαζόμαστε τρία μοναδιαια, ορθοκανονικά διανύσματα που τα συμβολιζουμε $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ωστε καθε διανυσμα $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ να γράφεται ως $\vec{a} = a_1 \cdot \hat{i} + a_2 \cdot \hat{j} + a_3 \cdot \hat{k}$

Λεμε οτι τα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ οριζουν μια βαση στον $\mathbb{R}^3$



6. Συμβολίζουμε το μήκος ενός διανύσματος $\|\vec{a}\|$ ή $|\vec{a}|$ και αν $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ τότε $\|\vec{a}\| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

7. Εφοδιάζουμε τα διανύσματα με μια πράξη που ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο. Δηλ. στο ζεύγος διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ αντιστοιχεί ένας αριθμός $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\theta$, θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων

$\theta = \pi/2$: $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ($\vec{a}, \vec{b}$ κάθετα μεταξύ τους)

$\theta = 0$: $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

↓

η ισότητα διασφζεται και από τις 2 πλευρές

Γενικά τα διανύσματα βάσης $\{\hat{e}_n\}_{n=1}^{N}$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

↓

δέλτα του Kronecker

Γεωμετρική Σημασία εσωτερικού γινόμενου: προβολή

Ιδιότητες εσωτ. γινομένου:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$
2. $\vec{c}(\lambda\vec{a} + \kappa\vec{b}) = \lambda\vec{c}\vec{a} + \kappa\vec{c}\vec{b} = \lambda\vec{a}\vec{c} + \kappa\vec{b}\vec{c}$

με $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$

3. Αν $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ κ' $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

τότε:

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \overset{?!}{=}$$

$$\overset{?!}{=} a_1 b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

↳ προσοχή στις πράξεις

χρησ. σωστές πράξεις από την 1η σελ.

$$\left.\begin{aligned}\hat{i}\cdot\hat{i} &= 1\\ \hat{i}\cdot\hat{j} &= 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Δέλτα του Kronecker}$$

Επίσης $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

συνεπώς $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

↳ το $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ πρέπει να είναι < 1

είναι όμως?

λόγω cos

Μη Ευκλείδιοι χώροι:

Ειδική Θεωρία σχετικότητας: Ορίζουμε τον 4-διάστατο χώρο (x, y, z, ct)

t ο χρόνος κ' c η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

λέμε στο κενό γιατί μπορεί να αλλάξει η ταχύτητα του αν δεν είναι στο κενό και είναι αλλού (π.χ. αέρας)

Ορίζουμε $\underset{\sim}{P}\cdot\underset{\sim}{P}' = ct\cdot t' - (xx' + yy' + zz')$

αλλοσαξονικό διάνυσμα $\quad \underset{\sim}{P} = (x, y, z, ct), \underset{\sim}{P}' = (x', y', z', ct')$

και άρα $\underset{\sim}{P}^2 = ct^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

Δηλ. εδώ το μέτρο ενός διανυσ. μπορεί να είναι μηδέν ακόμα και όταν $\underset{\sim}{P} \neq \underset{\sim}{0}$ ακόμα επιτρέπει $\underset{\sim}{P}^2 < 0$!

↳ άσχετη παρένθεση

Αξιωματική θεμελίωση διανυσμ. χώρων

Συμβολισμός bra-ket (bracket) $\vec{a} = |a\rangle$ είναι τόσο γενικός που μπορεί (αν διαβαστεί κατάλληλα) να ορίσει την κατάσταση ενός σωματιδίου.

Κάθε διανυσματικός χώρος S χαρακτηρίζεται από τα αξιώματα / ιδιότητες:

1. Κλειστός ως προς την πρόσθεση
$\forall\ |a\rangle, |b\rangle \in S$ και $(|a\rangle + |b\rangle) \in S$

2. Κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό (βαθμωτό)
$\forall\ |a\rangle \in S,\ \lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $(\lambda |a\rangle) \in S$

3. Μηδενικό στοιχείο $|0\rangle \equiv 0$, ώστε
$\forall\ \langle a| \in S \quad |a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$

4. Ύπαρξη αντιθέτου
$\forall\, |a\rangle \in S\; \exists\, |a'\rangle \in S$ ώστε
$|a\rangle + |a'\rangle = 0$ ή $\langle a\rangle = -|a'\rangle$
ή $|a'\rangle = -|a\rangle$

5 Ιδιότητες πρόσθεσης
a. $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$
b. $|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

6. Ιδιότητες πολ/σμού με αριθμούς
a. $1 \cdot |a\rangle = |a\rangle$
b. $\lambda(k\,|a\rangle) = k(\lambda\,|a\rangle) = k\lambda \cdot |a\rangle$
c. $(k+\lambda)\,|a\rangle = k\,|a\rangle + \lambda\,|a\rangle$
d. $\lambda(|a\rangle + |b\rangle) = \lambda\,|a\rangle + \lambda\,|b\rangle$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι:
1. Το μηδενικό διάνυσμα είναι μονοσήμαντα ορισμένο (μοναδικό)
2. Ομοίως και για το αντίθετο διάνυσμα
3. $0 \cdot |a\rangle = 0$ και $\lambda \cdot |a\rangle = |a\rangle$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$
4. Το αντίθετο του $|a\rangle$ είναι το $-|a\rangle$